1. Egyenlőtlenségek

1.1. Háromszög-egyenlőtlenség

1. Tétel. *Tetszőleges* $a,\, b \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$|a| + |b| \geq |a + b|$$

Bizonyítás:

Mivel az egyenlőtlenség mindkét oldala nemnegatív, ha mindkét oldalt négyzetre emeljük, az eredetivel ekvivalens

$$|a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \geq |a + b|^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Felhasználva, hogy egy valós szám négyzete mindig megegyezik az abszolút értékének négyzetével:

$$a^2 + 2|a||b| + b^2 \geq (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Mindkét oldalból kivonva a négyzetes tagokat, majd 2-vel osztva:

$$|a||b| \geq ab$$

Ez az összefüggés tetszőleges valós a és b esetén igaz, mert a két oldal abszolút értéke megegyezik és a baloldal biztosan nemnegatív. Mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, az eredeti összefüggés is tetszőleges valós a és b-re teljesül.

2. Tétel. *Tetszőleges* $a,\, b \in \mathbb{R}$ *esetén*

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

Bizonyítás:

Alkalmazzuk az előző tételt a b és $a - b$ számokra!

$$|b| + |a - b| \geq |b + (a - b)| = |a|$$

Átrendezve

$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

A két oldalt megcserélve:

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

Mivel $|a - b| = |b - a|$, változócserével adódik, hogy

$$|b| - |a| \leq |a - b|$$

is teljesül, azaz

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$$

1.2. Bernoulli-egyenlőtlenség

3. Tétel. *Ha $a \in \mathbb{R}$ és $a > -1$, továbbá $n \in \mathbb{N}$, akkor*

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

Bizonyítás: (A bizonyítást n-re vonatkozó teljes indukcióval végezzük.)

1. Ha $n = 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalán 1 áll, azaz az egyenlőtlenség teljesül.
2. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség helyességét már beláttuk valamilyen $n = k$ számra, azaz tudjuk, hogy $(1+a)^k \geq 1 + ka$ teljesül. (Indukciós feltevés) Ekkor

   $$(1+a)^{k+1} = (1+a)(1+a)^k \geq (1+a)(1+ka)$$

   Itt egyrészt felhasználtuk az indukciós feltevést, másrészt, hogy $1 + a > 0$ az $a > -1$ feltétel miatt. Tehát

   $$(1+a)^{k+1} \geq (1+a)(1+ka) = 1 + ka + a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a,$$

   ahol felhasználtuk, hogy $ka^2 \geq 0$. Ezzel beláttuk, hogy az állítás $n = k+1$-re, azaz a k-nál 1-gyel nagyobb természetes számra is igaz.

Ebből az állítás minden $n \in \mathbb{N}$ számra következik.

1.3. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség

4. Tétel. *Ha n pozitív egész és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Bizonyítás:(n-re vonatkozó teljes indukcióval.)

1. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló.
   $n = 2$-re a következőképpen igazolhatjuk:

   $$\begin{aligned}
   (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 &\geq 0 \\
   a_1 - 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} + a_2 &\geq 0 \\
   a_1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2} \\
   a_1 + a_2 &\geq 2\sqrt{a_1 a_2} \\
   \frac{a_1 + a_2}{2} &\geq \sqrt{a_1 a_2}
   \end{aligned}$$

2. Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$-ra (indukciós feltevés) és mutassuk meg, hogy ebből az $n = k+1$ eset helyessége is következik!

   Válasszuk meg a jelöléseket úgy, hogy $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k \leq a_{k+1}$. Vezessük be az $A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1}$ jelölést, azaz jelöljük a $k+1$ szám számtani közepét A-val. Ekkor $a_1 \leq A \leq a_{k+1}$. Jelöljük az $a_1 + a_{k+1} - A$ értékét b-vel. Nyilván $b > 0$. Mivel az indukciós feltevés szerint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség k darab szám esetén teljesül,

$$\frac{a_2 + a_3 + \ldots + a_k + b}{k} \geq \sqrt[k]{a_2 a_3 \ldots a_k b}$$

Mivel $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = (k+1)A$, ezért $a_2 + a_3 + \ldots + a_k + b = a_2 + a_3 + \ldots + a_k + (a_1 + a_{k+1} - A) = (a_1 + a_2 + \ldots a_k + a_{k+1}) - A = (k+1)A - A = kA$, azaz a fenti egyenlőtlenség

$$A \geq \sqrt[k]{a_2 a_3 \ldots a_k b}$$

alakba írható, ami ekvivalens a következővel:

$$A^k \geq a_2 a_3 \ldots a_k b$$

Megszorozva az egyenlőtlenség mindkét oldalát A-val:

$$A^{k+1} \geq a_2 a_3 \ldots a_k b A$$

Most belátjuk, hogy $bA \geq a_1 a_{k+1}$. Valóban $(a_1 - A)(a_{k+1} - A) \leq 0$, mert ha a baloldalon egyik tényező sem 0, akkor ellentétes előjelűek. Beszorozva és rendezve:

$$\begin{aligned} a_1 a_{k+1} - a_1 A - a_{k+1} A + A^2 &\leq 0 \\ a_1 a_{k+1} &\leq a_1 A + a_{k+1} A - A^2 \\ a_1 a_{k+1} &\leq (a_1 + a_{k+1} - A)A \\ a_1 a_{k+1} &\leq bA \end{aligned}$$

Visszatérve az előző egyenlőtlenségre:

$$A^{k+1} \geq a_2 a_3 \ldots a_k b A \geq a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}$$

Ahonnan

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = A \geq \sqrt[k+1]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_k a_{k+1}}$$

Ezzel igazoltuk, hogy ha k pozitív szám ra mindig igaz a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, akkor $k+1$ pozitív számra is igaz.

Az egyenlőtlenség tehát minden pozitív egész n-re teljesül.

1.4. A mértani és a harmonikus közép közötti egyenlőtlenség

5. Tétel. *Ha n pozitív egész és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok, akkor*

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

Bizonyítás:

A feltétel szerint $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ is n pozitív szám, amelyekre alkalmazva a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

Mindkét oldal reciprokát véve az egyenlőtlenség irányítása megfordul[1], amiből a bizonyítandó egyenlőtlenség azonnal adódik.

[1] Hiszen mindkét oldal pozitív.